2º BCN Problemas de teoremas de continuidad

1. Demuestra que $f(x)=\dfrac{x^3-2x-3}{2x+1}$ se anula en el intervalo $[1,3]$. Enuncia el teorema en el que te apoyas para afirmarlo.

2. Dada la función $f(x)=2-x+\ln x$, prueba que existe un $c\in\left(\dfrac{1}{e^2},1\right)\ /\ f(c)=0$.

3. Calcula, con un error menor que una décima, una raíz positiva del polinomio x^3+x-1.

4. Dadas las funciones $f(x)=x\ sen\,x$ y $g(x)=\ln x$, justifica que existe un punto del intervalo $[2,3]$ en el que ambas toman el mismo valor.

5. Sean $f(x)=e^x$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Demuestra que las gráficas de las funciones se cortan en un punto con abscisa *x* mayor que cero.

6. Prueba que la ecuación $x+sen\,x=1$ tiene, al menos, una solución.

7. Prueba que la función $f(x)=x^3+3$ recorre todos los valores del intervalo $[4,12]$.

8. Comprueba que la ecuación $x^2=x\ sen\,x+\cos x$ tiene alguna solución en el intervalo $[0,\pi]$

9. ¿Tiene alguna solución real la ecuación $x^5+x+1=0$?

10. ¿Tiene alguna solución la ecuación $sen\,x+2x+1=0$? En caso afirmativo, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre.

11. La función $f(x)=tg\,x$ toma valores distintos en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

12. Si *f* es una función continua en $[-3,4]$ y $f(-3)=5$, $f(4)=-2$, ¿hay algún valor de *x* para el que la función tome el valor 3?

13. Demuestra que la función $f(x)=e^x-x-3$ corta el semieje de abscisas positivo al menos una vez.

14. ¿Existe un número real para el que la igualdad $3\ sen\,x=e^x\cos x$ es cierta?

15. Prueba que la función $f(x)=e^x-1$ toma todos los valores del intervalo $[0,e-1]$

16. ¿Se puede afirmar que la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ está acotada en el intervalo $[0,2]$? ¿Y en el $[-2,0]$?

17. Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)$ y calcula el valor $c\in(-\pi,\pi)$ al que hace mención el teorema. $f(x)=\begin{cases}\cos x & si\ -\pi\le x\le 0\\ a+x^2 & si\ 0\prec x\prec 1\\ \dfrac{b}{x} & si\ 1\le x\le \pi\end{cases}$

18. Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz el polinomio $2x^4-14x^2+14x-1$.

19. Dada la función $f(x)=x^3+x-5$, prueba que existe un valor c tal que $f(c)=20$.

20. En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley:

$$T(t)=\begin{cases}\sqrt{t+a} & si\ \ t\prec 8\ horas\\ \dfrac{-3+\sqrt{t-15}}{t-8} & si\ t\ge 8\ horas\end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t=8$.

a) Decide la cuestión.

b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

21. Demuestra que existe algún valor de x que verifica $x^{179}+\dfrac{163}{1+x^2\,sen^2x}=119$