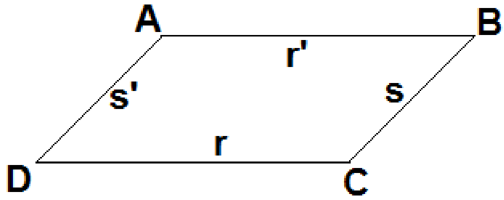
PROBLEMAS RESUELTOS GEOMETRÍA

1) Uno de los vértices de un paralelogramo ABCD es el punto $A(1,2)$ y dos de los lados están sobre las rectas $r: 3x-5y-2=0$, $s: 6x-7y-1=0$. Calcula los demás vértices.

Solución:



Como el punto A no verifica la ecuación de r ni la de s, podemos dibujar el paralelogramo de la siguiente manera:

El vértice $C = r \cap s = \begin{cases} 3x-5y-2=0 \\ 6x-7y-1=0 \end{cases}$

Resolvemos el sistema y obtenemos $x=-1,\ y=-1$. Por tanto $\boxed{C=(-1,-1)}$

Para calcular B necesitamos la ecuación de la recta r' que pasa por A y es paralela a la recta r: $r': 3x-5y+c=0$. Sustituimos A: $3-10+c=0 \Rightarrow c=7$. Por tanto $r': 3x-5y+7=0$

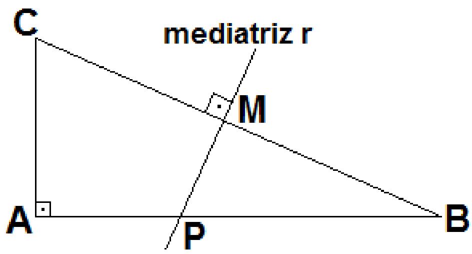
El vértice $B = r' \cap s = \begin{cases} 3x-5y+7=0 \\ 6x-7y-1=0 \end{cases}$. Resolvemos el sistema y obtenemos $\boxed{B=(6,5)}$

Para calcular el vértice D podemos proceder de manera similar a como hemos obtenido B calculando la recta s' que pasa por A y es paralela a la recta s. Pero es más sencillo usar vectores:
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Rightarrow D-C=A-B \Rightarrow D=A-B+C$. Se obtiene $\boxed{D=(-6,-4)}$

2) Dado el triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(9,-4)$ y $C(4,6)$:

a) Comprueba que es un triángulo rectángulo en el vértice A.
b) Calcula la ecuación de la mediatriz de la hipotenusa.
c) Halla el punto de corte de la mediatriz con el cateto mayor.

Solución:



a) Hay que comprobar que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(8,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(3,4)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\cdot 3+(-6)\cdot 4=0$

Por tanto $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ y el triángulo es rectángula en A.

b) La mediatriz r es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}=(-5,10)$ y pasa por M, el punto medio de BC.
Su ecuación será: $-5x+10y+c=0$.

$M=\frac{B+C}{2}=\left(\frac{13}{2},1\right)$. Lo sustituimos en la ecuación anterior y obtenemos $c=\frac{45}{2}$.

Por tanto $r: -5x+10y+\frac{45}{2}=0$. Quitamos denominador y simplificamos: $\boxed{r: -2x+4y+9=0}$

c) Los catetos miden $\left|\overrightarrow{AB}\right|=10$ y $\left|\overrightarrow{AC}\right|=5$, así que el mayor es AB.

La ecuación de la recta AB es $r_{AB}: 6x+8y+c=0$. Sustituyendo A obtenemos $c=-22$. Por tanto la ecuación, simplificada, queda $r_{AB}: 3x+4y-11=0$

El punto de corte de las dos rectas es $P = r \cap r_{AB} = \begin{cases} -2x+4y+9=0 \\ 3x+4y-11=0 \end{cases}$

Resolvemos el sistema y obtenemos $\boxed{P=\left(4,-\frac{1}{4}\right)}$

3) Escribe la ecuación de la recta r que pasa por $A(2,3)$ y $B(5,6)$ y halla la ecuación de una recta paralela a r, cuya distancia a r sea igual a la distancia entre A y B.
Solución:
Como $\overrightarrow{AB}=(3,3)$, la ecuación de r será: $3x-3y+c=0$. Sustituyendo A obtenemos $c=3$.

Por tanto $r:3x-3y+3=0$, que simplificada queda $\boxed{r:x-y+1=0}$

Llamamos s a la recta paralela a r. Su ecuación será $s:x-y+c=0$

Por ser r y s paralelas sabemos que $\text{dist}(r,s)=\dfrac{|1-c|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|1-c|}{\sqrt{2}}$

Por otro lado $\text{dist}(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

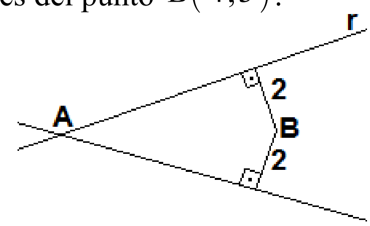
Por las condiciones del enunciado, $\text{dist}(r,s)=\text{dist}(A,B)$, por tanto $\dfrac{|1-c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{18}$

Con el signo $+$: $\dfrac{1-c}{\sqrt{2}}=\sqrt{18}\Rightarrow 1-c=6\Rightarrow c=-5$

Con el signo $-$: $\dfrac{1-c}{\sqrt{2}}=-\sqrt{18}\Rightarrow 1-c=-6\Rightarrow c=7$

Las dos rectas solución son $\boxed{s_1:x-y-5=0\ ,\ s_2:x-y+7=0}$

4) Calcula las rectas que pasan por el punto $A(1,1)$ y distan 2 unidades del punto $B(4,3)$.
Solución:



Escribimos la ecuación punto-pendiente de la recta r que pasa por A y tiene pendiente m: $r:y=1+m(x-1)$

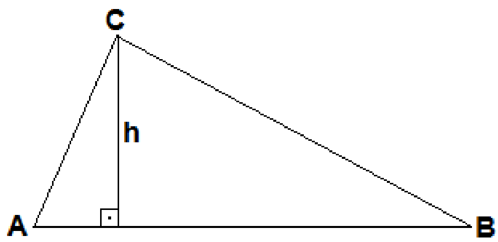
Obtenemos la ecuación implícita $r:-mx+y-1+m=0$

Como $\text{dist}(B,r)=2\Rightarrow\dfrac{|-4m+3-1+m|}{\sqrt{(-m)^2+1^2}}=\dfrac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2\Rightarrow|-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

Elevamos al cuadrado: $9m^2-12m+4=4m^2+4\Rightarrow 5m^2-12m=0\Rightarrow m=0,\ \dfrac{12}{5}$

Hay dos soluciones: $\boxed{r_1:y=1,\ r_2:y=1+\dfrac{12}{5}(x-1)}$

5) Halla el valor del parámetro k para que los puntos $A(2,1)$, $B(-3,5)$ y $C(4,k)$ formen un triángulo de área 6.
Solución:



La longitud de la base es $\left|\overrightarrow{AB}\right|=|(-5,4)|=\sqrt{41}$

La altura h es la distancia de C a la recta AB.
Al calcular la recta AB obtenemos $4x+5y-13=0$

Por tanto $h=\dfrac{|16+5k-13|}{\sqrt{4^2+5^2}}=\dfrac{|5k+3|}{\sqrt{41}}$

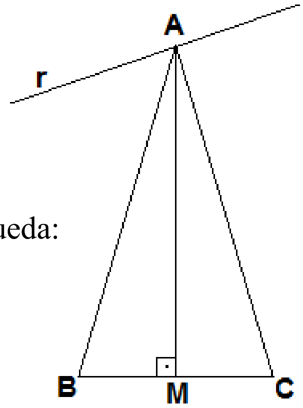
El área del triángulo es $\dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\dfrac{\sqrt{41}\cdot\dfrac{|5k+3|}{\sqrt{41}}}{2}=\dfrac{|5k+3|}{2}=6\Rightarrow|5k+3|=12$

Con el signo $+$: $5k+3=12\Rightarrow\boxed{k=\dfrac{9}{5}}$

Con el signo $-$: $5k+3=-12\Rightarrow\boxed{k=-3}$

6) Los puntos $B(-1,3)$ y $C(3,-3)$ forman el lado desigual de un triángulo isósceles ABC. Calcula el vértice A sabiendo que está situado en la recta $r: x+2y-15=0$

Solución:



En un triángulo isósceles la mediatriz del lado BC pasa por el vértice A.

$\overrightarrow{BC}=(4,-6)$ y $M=\dfrac{B+C}{2}=(1,0)$

La ecuación de la mediatriz será: $4x-6y+c=0$

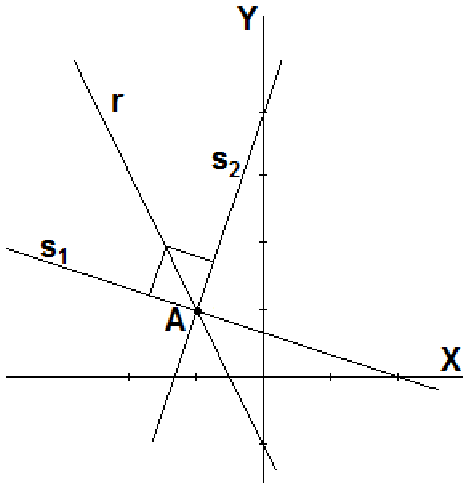
Sustituyendo M se obtiene la ecuación $4x-6y-4=0$, que simplificada queda: $2x-3y-2=0$

El vértice $A=r\cap\text{mediatriz}=\begin{cases}x+2y-15=0\\2x-3y-2=0\end{cases}$

Se resuelve el sistema y obtenemos $\boxed{A=(7,4)}$

7) La recta $r: 2x+y+1=0$ es la bisectriz de un ángulo recto cuyo vértice es el punto $A(-1,1)$. Halla las ecuaciones de los lados del ángulo recto.

Solución:



Llamamos s_1 y s_2 a los lados del ángulo recto y m a la pendiente de uno de esos lados.

La recta r, que tiene pendiente -2, forma un ángulo de 45º con cada uno de los lados.

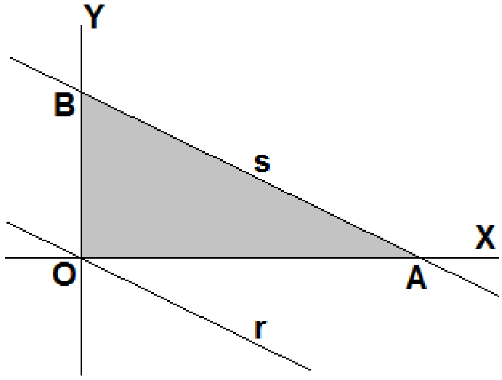
Por tanto, $tg\,45^{o}=1=\left|\dfrac{m-(-2)}{1+m\cdot(-2)}\right|=\left|\dfrac{m+2}{1-2m}\right|$

Con el signo $+$: $\dfrac{m+2}{1-2m}=1\Rightarrow m+2=1-2m\Rightarrow m=-\dfrac{1}{3}$

Con el signo $-$: $\dfrac{m+2}{1-2m}=-1\Rightarrow m+2=-1+2m\Rightarrow m=3$

Utilizando estas pendientes y que los lados pasan por A, obtenemos las ecuaciones punto-pendiente: $\boxed{s_1: y=1-\dfrac{1}{3}(x+1)\,,\ s_2: y=1+3(x+1)}$

8) Dada la recta $r: 2x + 3y = 0$, halla una recta paralela a r que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área 3.



Solución:

La recta s paralela a r tendrá de ecuación $s: 2x + 3y + c = 0$

Llamamos A y B a los puntos de corte de la recta s con los ejes X e Y, respectivamente.

$$A = s \cap \text{eje}\, X = \begin{cases} 2x + 3y + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(-\frac{c}{2}, 0 \right)$$

$$B = s \cap \text{eje}\, Y = \begin{cases} 2x + 3y + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, -\frac{c}{3} \right)$$

La base del triángulo es la distancia del origen al punto A: $\left| -\frac{c}{2} \right|$

La altura del triángulo es la distancia del origen al punto B: $\left| -\frac{c}{3} \right|$

El área del triángulo es $\dfrac{OA \cdot OB}{2} = \dfrac{\left| -\frac{c}{2} \right| \cdot \left| -\frac{c}{3} \right|}{2} = \dfrac{\left| \frac{c^2}{6} \right|}{2} = \dfrac{c^2}{12}$

Igualamos a 3 y resolvemos: $\dfrac{c^2}{12} = 3 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = \pm 6$

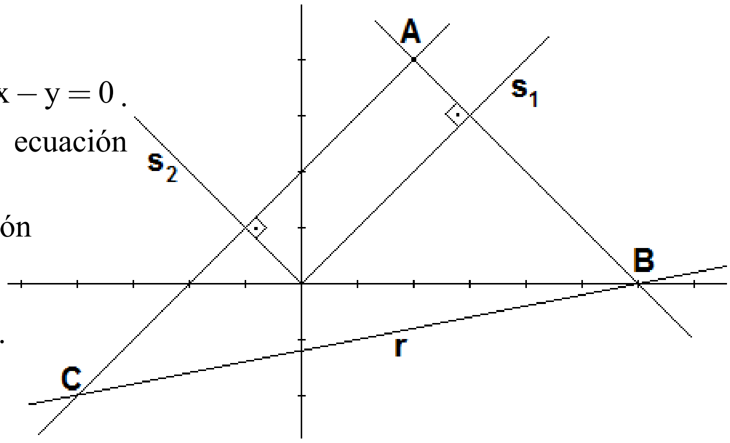
Hay dos soluciones: $\boxed{s_1: 2x + 3y + 6 = 0,\ s_2: 2x + 3y - 6 = 0}$

9) Por el punto $A(2, 4)$ trazamos las rectas s_1 y s_2 perpendiculares a la bisectriz del primer y segundo cuadrante, respectivamente. Calcula:

a) Ecuaciones de s_1 y s_2.

b) Vértices del triángulo formado por la recta $r: x - 5y - 6 = 0$ y las rectas s_1 y s_2.

c) Área del triángulo anterior.



Solución:

a) La bisectriz del primer cuadrante es la recta $x - y = 0$.

Por tanto la perpendicular s_1 tendrá como ecuación $x + y + c = 0$.

Sustituyendo el punto A obtenemos la ecuación $\boxed{s_1: x + y - 6 = 0}$.

De forma análoga se obtiene $\boxed{s_2: x - y + 2 = 0}$.

b) Llamamos B y C a los otros dos vértices.

El vértice $B = s_1 \cap r = \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - 5y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = (6, 0)}$

El vértice $C = s_2 \cap r = \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - 5y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = (-4, -2)}$

c) La base del triángulo ABC es $\left| \overrightarrow{BC} \right| = \left| (10, 2) \right| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

La altura es $\text{dist}(A,r)=\dfrac{|2-20-6|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\dfrac{24}{\sqrt{26}}$

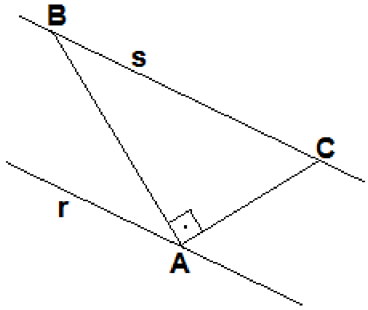
El área del triángulo será: $\dfrac{2\sqrt{26}\cdot\dfrac{24}{\sqrt{26}}}{2}=\boxed{24}$

10) Dada la recta $r: x+2y+1=0$ y el punto $A(1,-1)$ situado en dicha recta, calcula:

a) La recta s paralela a r y que pasa por el punto $B(0,3)$.

b) El punto C de la recta s que forma con A y B un triángulo rectángulo en A.

Solución:



a) La ecuación de s es: $x+2y+c=0$

Sustituimos el punto B y obtenemos $\boxed{s: x+2y-6=0}$

b) Asignamos coordenadas (x,y) al punto C.

Como el triángulo ABC es rectángulo en A, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares, por tanto $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{AB}=(-1,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(x-1,y+1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,4)\cdot(x-1,y+1)=-x+1+4y+4=-x+4y+5=0$

Además el punto C verifica la ecuación de la recta s.

Por tanto C es la solución del sistema: $\begin{cases} x+2y-6=0 \\ -x+4y+5=0 \end{cases}$

Resolvemos y obtenemos $\boxed{C=\left(\dfrac{17}{3},\dfrac{1}{6}\right)}$

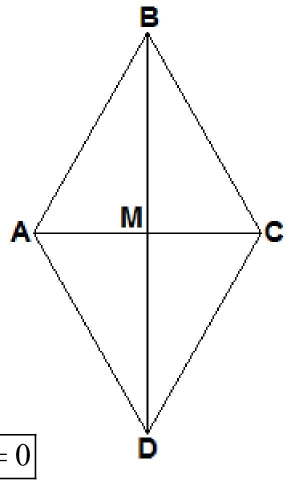
11) La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y tiene por extremos los puntos $A(-3,-2)$ y $C(1,2)$. Calcula:

a) El perímetro del rombo.

b) La ecuación de la diagonal mayor.

c) Los otros dos vértices.

Solución:



a) El perímetro será $4\cdot\text{dist}(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=|(4,4)|=\sqrt{32}=\boxed{4\sqrt{2}}$

b) La diagonal mayor es la mediatriz del segmento AC.

$\overrightarrow{AC}=(4,4)$, por tanto la ecuación será: $4x+4y+c=0$.

$M=\dfrac{A+C}{2}=(-1,0)$.

Sustituyendo M obtenemos $c=4$, y la ecuación, simplificada, queda: $\boxed{x+y+1=0}$

c) Asignamos coordenadas (x,y) a uno de los vértices B o D.

$\text{dist}(A,B)=4\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}=4\sqrt{2}\Rightarrow(x+3)^2+(y+2)^2=32$

Además estos puntos están en la diagonal mayor, luego verifican su ecuación.

Por tanto son la solución del sistema: $\begin{cases} (x+3)^2 + (y+2)^2 = 32 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

Resolvemos por sustitución: $x = -1 - y \Rightarrow (2-y)^2 + (y+2)^2 = 32 \Rightarrow 2y^2 = 24 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$

Para $y = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = -1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{B = \left(-1-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)}$

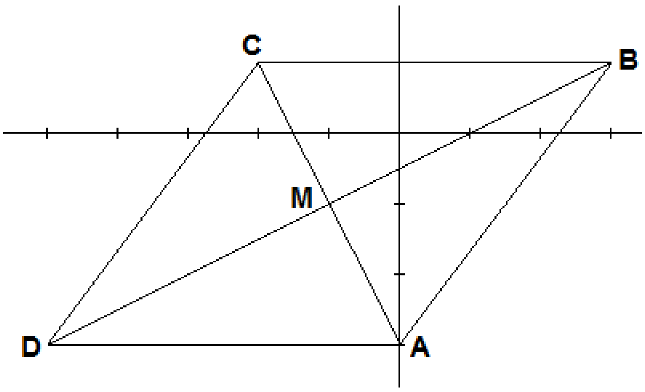
Para $y = -2\sqrt{3} \Rightarrow x = -1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{C = \left(-1+2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right)}$

12) Un rombo tiene el vértice A en el eje Y, y dos vértices opuestos son $B(3,1)$ y $D(-5,-3)$.

a) Calcula los vértices A y C.

b) Halla los ángulos interiores del rombo.

c) Calcula el área del rombo.



Solución:

a) A y C están en la mediatriz del segmento BD.

$\overrightarrow{BD} = (-8,-4)$, por tanto la ecuación de la mediatriz será: $-8x - 4y + c = 0$.

$M = \dfrac{B+D}{2} = (-1,-1)$

Sustituyendo M se obtiene $c = -12$.

La ecuación simplificada de la mediatriz queda: $2x + y + 3 = 0$

$A = \text{mediatriz} \cap \text{ejeY} = \begin{cases} 2x+y+3=0 \\ x=0 \end{cases}$. Resolviendo el sistema obtenemos $\boxed{A = (0,-3)}$

Para calcular el vértice C tenemos en cuenta que M también es el punto medio de AC, por tanto $M = \dfrac{A+C}{2} \Rightarrow C = 2M - A$. Operando $\boxed{C = (-2,1)}$

b) El ángulo α que forman AB y AD se calcula con la fórmula: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|}$

$\overrightarrow{AB} = (3,4)$ y $\overrightarrow{AD} = (-5,0)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -15$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$ y $\left|\overrightarrow{AD}\right| = 5$

Operando se obtiene $\cos\alpha = \dfrac{-15}{25} = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha \simeq \boxed{126'9^\circ}$

El otro ángulo es el suplementario: $\boxed{53'1^\circ}$

c) La diagonal mayor mide $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|(-8,-4)\right| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

La diagonal menor mide $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|(-2,4)\right| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

El área del rombo será $\dfrac{\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \dfrac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = \boxed{20}$