2º BCN   Problemas del teorema del valor medio

1. Demuestra que si $f(x)$ es derivable en todo R; $f'(x) \geq 1, \forall x \in R$ y $f(0) = 3$, se cumple que $f(22) \geq 25$.

2. Demuestra que, en algún punto del intervalo $(0 , 1)$, la recta tangente a $y = \sqrt{x}$ tiene de pendiente 1.

3. Demuestra que la ecuación $x^5 + 5x^3 + 2x - 8 = 0$ tiene una **única** raíz real.

4. Demuestra que $e^x + 2x = 0$ tiene una raíz real (Bolzano) única (Rolle).

5. Demuestra que:

a) $\dfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \dfrac{1}{8}$

b) $1 - \dfrac{a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b}{a} - 1 \qquad \forall a, b \in R / 0 < a < b$

c) $n \cdot 2^{n-1} < 3^n - 2^n < n \cdot 3^{n-1} \qquad \forall n \in N, n \geq 2$

d) $\dfrac{x}{1 + x^2} < arctg(x) < x \qquad \forall x > 0$

e) $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x \qquad \forall x > 0$

6. Utiliza el teorema del valor medio para calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[7]{x + 3} - \sqrt[7]{x}$

7. Dada la ecuación $x^n + x + 1 = 0$, demuestra que:

a) Si n es par la ecuación no tiene más de dos raíces reales.

b) Si n es impar no tiene más que una raíz real.

8. Dada $f(x) = x^3 - 12x \quad en \quad \left[0 , 2\sqrt{3}\right]$. Halla el valor de c que cumple las condiciones del teorema del valor medio.

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{tg\, x}{tg\, 5x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{tg\, x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 9} - 3}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) \cot g\, x$ f) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{tg\, x} - \dfrac{1}{x} \right)$ h) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{2x}$ i) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{3}{x}}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} \right)^{tg\, x}$ k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 - x)\, e^x - (2 + x)}{x^2}$

m) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$ n) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ ñ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$

o) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-sen\,x}{x^{3}}$ p) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-sen\,x}$ q) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\arccos x}{sen\,x\ \cos x}$

r) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ s) $\lim_{x\to\infty} x\,(5^{\frac{1}{x}}-1)$ t) $\lim_{x\to 0^{+}} x^{sen\,x}$

Soluciones:

6. 0 **8.** c = 2 **9.** a) 5 b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$ d), e), f) y g) 0 h) 1 i) e^{3} j) 1 k) e^{2} l) 0 m) $\dfrac{1}{2}$ n) 0 ñ) 2 o) $-\dfrac{1}{3}$ p) ∞ q) $\dfrac{\pi}{2}$ r) 1 s) $ln\,5$ t) 1