

TRIGONOMETRÍA

1) Sabiendo que $\text{sen}36^\circ = \frac{3}{5}$, calcula las siguientes razones trigonométricas, relacionando cada ángulo con el de 36° (sin usar calculadora):

- a) $\text{tg}36^\circ$ b) $\text{cos}72^\circ$ c) $\text{tg}18^\circ$ d) $\text{sen}54^\circ$ e) $\text{cos}144^\circ$ f) $\text{tg}216^\circ$ g) $\text{cos}126^\circ$
 h) $\text{cos}(-36^\circ)$ i) $\text{cos}6^\circ$ j) $\text{sen}66^\circ$ k) $\text{tg}81^\circ$ l) $\text{sen}234^\circ$ m) $\text{cos}24^\circ$

2) Sabiendo que $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$ y que $\alpha \in \text{II}$, calcula (sin usar calculadora):

- a) $\text{cos}\alpha$ b) $\text{tg}\alpha$ c) $\text{cos}(\alpha + 180^\circ)$ d) $\text{tg}(270^\circ - \alpha)$ e) $\text{cos}\frac{\alpha}{2}$ f) $\text{sen}(2\alpha + 30^\circ)$
 g) $\text{tg}(45^\circ + \alpha)$ h) $\text{sen}\left(180^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$ i) $\text{cos}(90^\circ - \alpha)$ j) $\text{sen}(360^\circ - \alpha)$ k) $\text{tg}(2\alpha + 135^\circ)$

3) a) Sabiendo que $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ y que $\alpha \in \text{I}$, calcula $\text{tg}\alpha$ (sin usar calculadora).

b) Demuestra que cada una de las siguientes expresiones vale 1 (sin usar calculadora):

$$\left(\text{cos}147^\circ \cdot \text{cos}123^\circ - \text{sen}147^\circ \cdot \text{sen}123^\circ\right)^2; \quad \frac{1 + \text{tg}69^\circ \cdot \text{tg}24^\circ}{\text{tg}69^\circ - \text{tg}24^\circ}$$

4) Si $\text{cos}2\alpha = -\frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{II}$, calcula (sin usar calculadora): a) $\text{tg}2\alpha$ b) $\text{tg}\alpha$ c) $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$

5) Sabiendo que $\text{tg}\alpha = 2$, $\text{tg}\beta = 3$ y $\text{tg}\gamma = 4$, calcula $\text{tg}(\alpha + \beta - \gamma)$ (sin usar calculadora).

6) a) Si $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ con $\alpha \in \text{II}$ y $\text{cos}\beta = \frac{3}{5}$ con $\beta \in \text{I}$ calcula (sin usar calculadora):

- a₁) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ a₂) $\text{cos}(\alpha - \beta)$ a₃) $\text{tg}(\alpha - \beta)$ a₄) $\text{tg}\frac{\beta}{2}$ a₅) $\text{sen}(\alpha + 2\beta)$ a₆) $\text{tg}(\beta - 2\alpha)$

b) Si α y $\beta \in \text{III}$, $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ y $\text{cot}\beta = \frac{5}{12}$, calcula (sin usar calculadora):

- b₁) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) - \text{cos}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$ b₂) $\text{sen}\left(2\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$ b₃) $\text{cos}\left(2\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$

7) Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $(\text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha)^2 = 1 + \text{sen}2\alpha$ b) $\frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha}{\text{cos}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$ c) $\text{cos}3\alpha = 4\text{cos}^3\alpha - 3\text{cos}\alpha$

d) $\text{sen}a \cdot \text{sen}(b - c) + \text{sen}b \cdot \text{sen}(c - a) + \text{sen}c \cdot \text{sen}(a - b) = 0$ e) $\frac{\text{sen}(a + b)}{\text{sen}(a - b)} = \frac{\text{tga} \cdot \text{cot}b + 1}{\text{tga} \cdot \text{cot}b - 1}$

f) $\left(\frac{1}{\text{tg}a} - \text{tg}a\right) \cdot [\text{tg}(45^\circ + a) - \text{tg}(45^\circ - a)] = 4$ g) $\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}(45^\circ - \alpha) + \text{cos}\alpha \cdot \text{sen}(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\text{tg}\alpha = \text{cot}\alpha - \frac{\text{cot}^2\alpha - 1}{\text{cot}\alpha}$ i) $\text{cos}\alpha \cdot \text{cos}(30^\circ + \alpha) + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(30^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

j) $1 - \frac{1}{2}\text{sen}2\alpha = \frac{\text{sen}^3\alpha + \text{cos}^3\alpha}{\text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha}$ k) $\text{cos}^4\frac{a}{2} - \text{sen}^4\frac{a}{2} = \text{cos}a$ l) $\frac{\text{tga}}{\text{tg}2a - \text{tga}} = \text{cos}2a$

8) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$ b) $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ c) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ d) $6 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$
- e) $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$ f) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1$ g) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^2 x$ h) $\operatorname{sen} x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$
- i) $\cos x + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1$ j) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x$ k) $2 \operatorname{tg} x - 3 \cot x - 1 = 0$ l) $\cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
- m) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$ n) $\cos 2x + 5 \cos x = -3$ ñ) $2 + \cos x = \frac{5}{4} \sec x$ o) $4 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$

9) Dos caminos rectos se cortan en un ángulo de 75° . En uno de los caminos y a 1 km del cruce, hay una gasolinera. Calcula la distancia mínima que hay desde el otro camino a la gasolinera.

10) Calcula el área de un decágono regular de 8 cm de lado.

11) Dos personas que andan a una velocidad de 5 km/h parten de un cruce de caminos que forman un ángulo de 30° . ¿A qué distancia mutua se encontrarán al cabo de 2 horas?

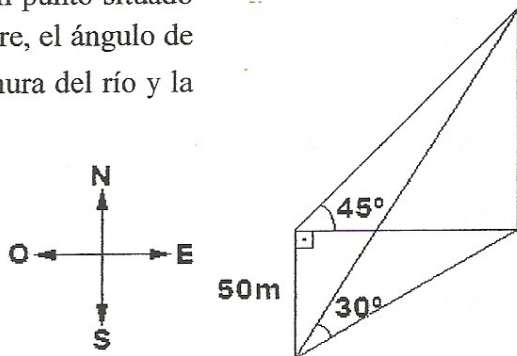
12) Dos circunferencias de radios 6 y 8 cm tienen sus centros a 20 cm de distancia. ¿Qué ángulo forma la recta que une sus centros con una tangente común exterior? ¿Y con una tangente interior?

13) Calcula el ángulo que forman entre sí las dos tangentes a una circunferencia de 15 cm de radio, trazadas desde un punto que dista 27 cm del centro.

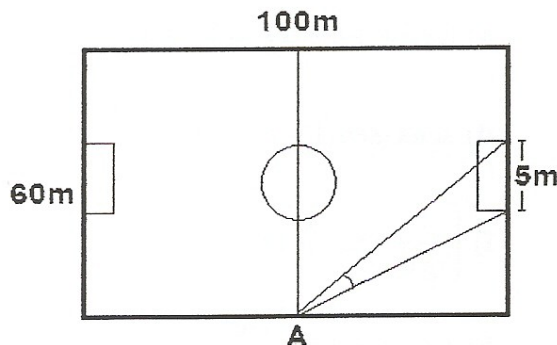
14) Una rampa de 10 m de longitud y una elevación de 25° conduce al pie de una torre. La elevación de la cúspide de la torre desde el principio de la rampa es de 80° . ¿Qué altura tiene la torre?

15) Sobre un peñasco situado en la ribera de un río se levanta una torre de 125 m de altura. Desde el extremo superior de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta es de $28^\circ 40'$ y desde la base de la torre, el ángulo de depresión del mismo punto es de $18^\circ 20'$. Calcula la anchura del río y la altura del peñasco.

16) Un hombre que está situado al oeste de una antena de radio observa que su ángulo de elevación es de 45° . Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30° . Halla la altura de la antena.



17) Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto A del campo de fútbol.

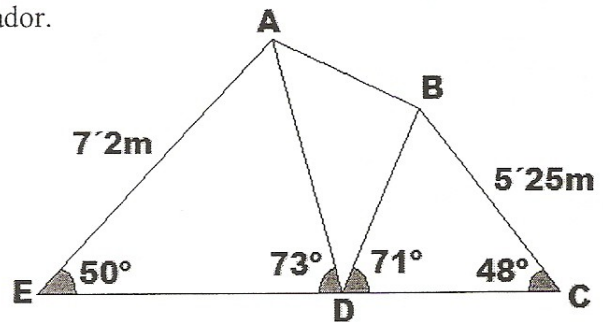


18) Una diagonal de un paralelogramo mide 10 cm y forma ángulos de 45° y 75° con los lados. Halla las longitudes de los lados y de la otra diagonal. Calcula su área.

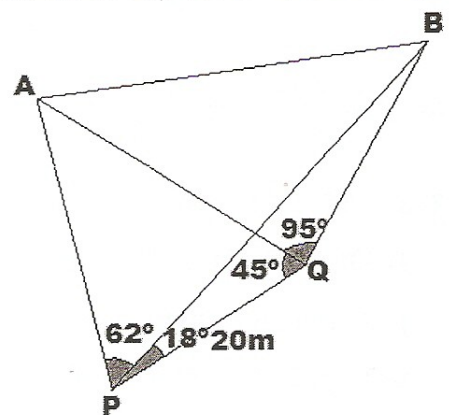
19) Dos ángulos de un triángulo de 14 cm^2 de área miden 30° y 40° . ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

20) Dos personas están separadas por una distancia de 2 km. Sobre su plano vertical ven una nube bajo ángulos respectivos de $73^\circ 18'$ y $84^\circ 17'$, estando la nube situada entre ambos. Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada observador.

21) Calcula la distancia entre los puntos A y B.



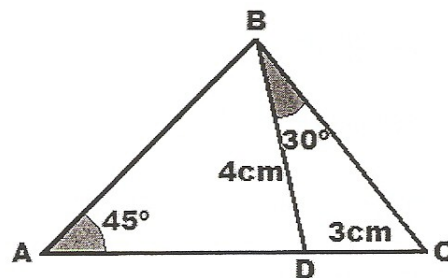
22) Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente. Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y de B, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.



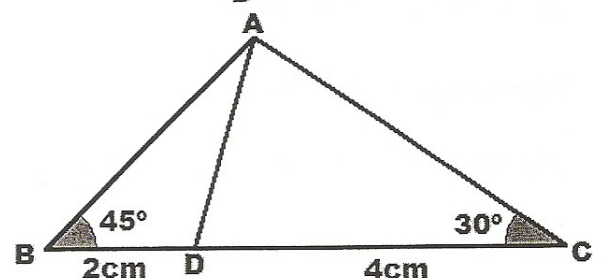
23) Para determinar la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B, tomamos desde otros puntos P y Q, situados en el mismo plano que A y B, las medidas indicadas en la figura. Calcula la distancia entre los puntos A y B.

24) Dos lados de un triángulo miden 12 cm y 10 cm y su área 40 cm^2 . Calcula los ángulos, la longitud del tercer lado y la altura sobre el lado mayor.

25) Calcula los lados del triángulo ABC.



26) Resuelve el triángulo ABC, calcula AD y el área de los triángulos ABD y ACD.



27) El lado mayor de un paralelogramo mide 56 cm y forma ángulos de 31° y 45° con las diagonales. Calcula la longitud del lado menor.

28) Cada diagonal de un trapecio isósceles mide 10 cm, la base menor 5 cm y uno de los ángulos 60° . Calcula el perímetro y el área del trapecio.

SOLUCIONES TRIGONOMETRÍA

1) a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $-\frac{4}{5}$ f) $\frac{3}{4}$ g) $-\frac{3}{5}$ h) $\frac{4}{5}$ i) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

j) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ k) 7 l) $-\frac{4}{5}$ m) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$

2) a) $-\frac{6}{7}$ b) $-\frac{\sqrt{13}}{6}$ c) $\frac{6}{7}$ d) $-\frac{6\sqrt{13}}{13}$ e) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ f) $\frac{-6\sqrt{39}+23}{98}$ g) $\frac{49-12\sqrt{13}}{23}$

h) $-\sqrt{\frac{13}{14}}$ i) $\frac{\sqrt{13}}{7}$ j) $-\frac{\sqrt{13}}{7}$ k) $\frac{12\sqrt{13}+23}{12\sqrt{13}-23} = \frac{2401+552\sqrt{13}}{1343}$

3) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ 4) a) $\frac{3}{4}$ b) -3 c) $\sqrt{\frac{10+\sqrt{10}}{20}}$ 5) $\frac{5}{3}$

6) a) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ b) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ c) $-\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{-7-24\sqrt{3}}{50}$ m) $\frac{-48-25\sqrt{3}}{39}$

8) a) 120°, 240° b) 135°, 315° c) 45°, 225° d) 120°, 240° e) 0°, 180°, 30°, 20°, 150°, 330°
 f) 30°, 210°, 150°, 330° g) 30°, 150°, 199° 28'16", 340° 31'44" h) 30°, 150° i) 0°
 j) 0°, 180°, 60°, 300° k) 135°, 315°, 56° 18'36", 236° 18'36" l) 30°, 150° m) 30°
 n) 120°, 240° ñ) 60°, 300° o) 0°, 180°

9) 965 m 10) 492'4cm² 11) 5'18km 12) 5'71° , 44'42°

13) 58'1° 14) 47'16m 15) 580m, 192m 16) 35'35m

17) 4'58° 18) lados: 11'15cm, 8'16cm, diagonal: 16'79cm, área: 78'79cm²

19) 4'81cm, 6'19cm, 9'05cm 20) 5km, 5'02km, 5'22km 21) 4'27m

22) 12'33km, 20'98km, 59'3km 23) 30'36m

24) ángulos: 41'81°, 82'53°, 55'66°, lado: 8'07cm, altura: 6'67cm

25) AB = 5'37cm , AC = 8'04cm , BC = 5'7cm

26) AB = 3'1cm , AC = 4'39cm , AD = 2'2cm , S_{ABD} = 2'19cm² , S_{ACD} = 4'39cm²

27) 44'29cm 28) 29'54cm , 46'58cm²