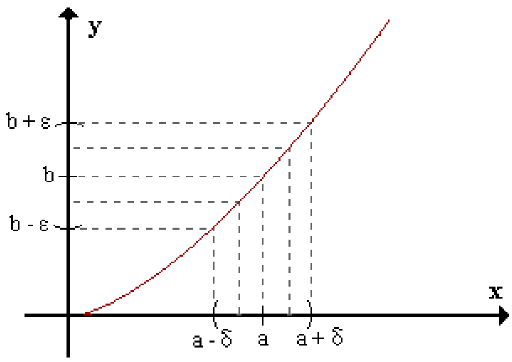
Límites en un punto

Def: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon \succ 0, \exists\ \delta \succ 0\ /\ si\ |x-a| \prec \delta \Rightarrow |f(x)-b| \prec \varepsilon$



Lo que significa que para cualquier entorno del límite *b*, $E(b,\varepsilon)$, podemos encontrar un entorno de *a*, $E(a,\delta)$, cuyos puntos tienen sus imágenes en el entorno de *b*.

- El límite, cuando existe, es único.

Cálculo de límites

Como las funciones elementales son continuas en su dominio y lo mismo ocurre con las operaciones entre ellas, para calcular el límite cuando *x* tiende a un número *a*, basta con sustituir *x* por *a*.

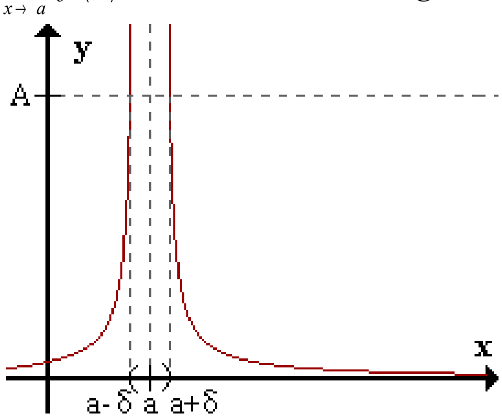
El único caso en el que no resulta un número real es el caso de la división por cero.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = \frac{b}{0} = \begin{cases} \infty & si\ b \neq 0 \\ \dfrac{0}{0} & si\ b = 0 \end{cases}$$

- Este último caso es una indeterminación, que habrá que resolver, dividiendo el numerador y el denominador entre $x-a$.

Def:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\ A \in \Re$, tan *grande como queramos*, $\exists\ \delta \in \Re,\ \delta \succ 0 /\ si\ |x-a| \prec \delta \Rightarrow |f(x)| \succ A$



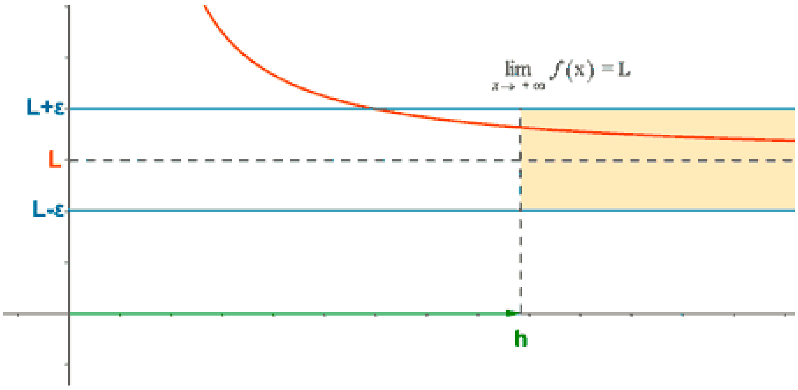
Esto es, que para cualquier entorno de infinito (valores mayores que *A*), podemos encontrar un entorno de *a* que tiene todas sus imágenes mayores que *A*.

En el momento en que aparece infinito tenemos otras indeterminaciones: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ y $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$L \cdot \infty = \begin{cases} \infty & si\ L \succ 0 \\ 0 \cdot \infty & Indeterminado \\ -\infty & si\ L \prec 0 \end{cases}$$

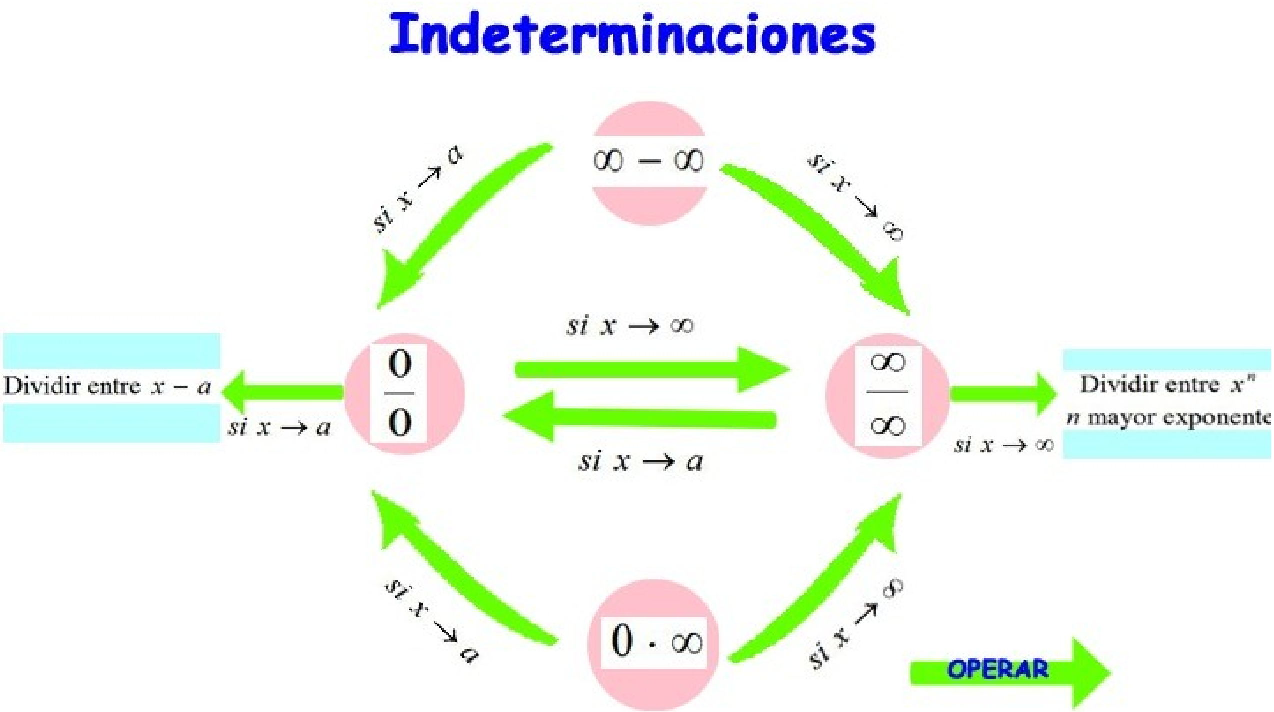
Límites en el infinito

Def: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon \succ 0,\ \exists\ h \in \Re\ ,\ /\ si\ x \succ h\ \left| f(x) - L \right| \prec \varepsilon$



Esto es, que para cualquier entorno de L podemos encontrar un entorno de infinito, valores mayores que h, para los que $f(x)$ está en un entorno de L.

- La indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, **cuando x tiende a infinito** se resuelve dividiendo el numerador y el denominador por x elevado al mayor exponente.



Límites de potencias:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \infty}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to \infty} g(x)}$$

Si los límites de *f y* g son números reales *L* y *M*, solo encontramos una indeterminación, que es cuando *L* = 0. En este caso $0^M = \begin{cases} 0 & si\ M \succ 0 \\ 0^0 & Indeterminado \\ \infty & si\ M \prec 0 \end{cases}$

Si alguno de ellos es infinito:

$$\infty^M = \begin{cases} \infty & si\ M \succ 0 \\ \infty^0 & Indeterminado \\ 0 & si\ M \prec 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L^\infty = \begin{cases} 0 & si\ 0 \le L \prec 1 \\ 1^\infty & Indeterminado \\ \infty & si\ L \succ 1 \end{cases}$$

- Las indeterminaciones 0^∞ y ∞^0 se resuelven aplicando logaritmos y por la regla de L´Hôpital y la indeterminación 1^∞ mediante el número *e*.

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$