

PARA PRACTICAR

Números racionales e irracionales

1 Expresa como fracción cada decimal y opera:

$$0,\overline{12} - 5,\overline{6} - 0,\overline{23} + 3,1$$

Recuerda que $5,\overline{6} = \frac{56-5}{9}$; $0,\overline{23} = \frac{23-2}{90}$.

2 Demuestra que el producto $4,0\overline{9} \cdot 1,3\overline{9}$ es un decimal exacto.

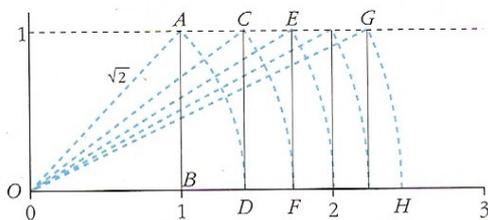
Comprueba, pasando a fracción, que los dos factores son decimales exactos.

3 Calcula: a) $\sqrt{1,\overline{7}}$ b) $\sqrt{\frac{1,\overline{3}}{3}}$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

- a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$ b) $0,5\overline{26}$ y $0,\overline{526}$
 c) $4,\overline{89}$ y $2\sqrt{6}$ d) $-2,0\overline{98}$ y $-2,1$

5 Observa cómo hemos representado algunos números irracionales:

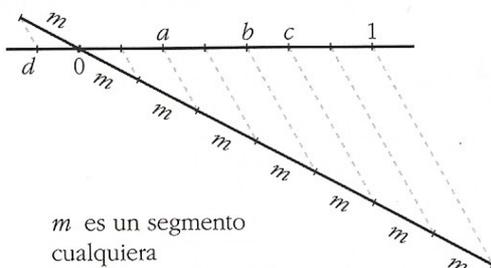


En el triángulo OAB , $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Por tanto, el punto D representa a $\sqrt{2}$.

¿Qué números representan los puntos F y H ? Justifica tu respuesta.

6 ¿Cuáles son los números racionales a, b, c, d representados en este gráfico?



m es un segmento cualquiera

Potencias

7 Halla sin calculadora: $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

8 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

- a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$
 c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ d) $\frac{a^{-3} b^{-4} c^7}{a^{-5} b^2 c^{-1}}$

Mira el problema resuelto número 2 c).

9 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

- a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

10 Resuelve, sin utilizar la calculadora:

- a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{343}$ c) $\sqrt[4]{625}$
 d) $\sqrt{0,25}$ e) $\sqrt[3]{8^4}$ f) $\sqrt[3]{0,001}$

11 Expresa como una potencia de base 2:

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $(-32)^{1/5}$ c) $(\sqrt[8]{2})^4$

12 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

- a) $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$
 c) $\frac{(-5)^3 (-8)^3 (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

13 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

- a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

14 Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:

- a) $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$ b) $(3^{-2})^{-3} \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 1$
 c) $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{8}{15}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \frac{80}{9}$

15 Demuestra, utilizando potencias, que:

- a) $(0,125)^{1/3} = 2^{-1}$ b) $(0,25)^{-1/2} = 2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Radicales

16 Introduce los factores dentro de cada raíz:

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ e) $2\sqrt[4]{4}$ f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

17 Sacar de la raíz el factor que puedas:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $4\sqrt{8}$ c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ h) $\sqrt{4a^2 + 4}$ i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

18 Simplifica:

a) $\sqrt[6]{0,027}$ b) $\sqrt[8]{0,0016}$ c) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$ d) $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

21 Realiza la operación y simplifica, si es posible:

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ e) $(\sqrt[6]{32})^3$ f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

22 Efectúa y simplifica, si es posible:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt[3]{4}$

En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2 , respectivamente.

23 Expresa con una única raíz:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

25 Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

26 Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

27 Efectúa y simplifica:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})2\sqrt{2}$ c) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

d) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$ e) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{1}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$ e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$ f) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

29 Efectúa y simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

Notación científica y errores

- 30** Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$
 b) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$
 c) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

- 31** Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:

a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$
 b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$

- 32** Efectúa: $\frac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^6 + 10^5}$

- 33** Expresa en notación científica y calcula:

$$\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$$

- 34** Considera los números:

$$A = 3,2 \cdot 10^7; B = 5,28 \cdot 10^4 \text{ y } C = 2,01 \cdot 10^5$$

Calcula $\frac{B+C}{A}$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

- 35** Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

Intervalos y valor absoluto

- 36** Expresa como desigualdad y como intervalo, y represéntalos:

- a) x es menor que -5 .
 b) 3 es menor o igual que x .
 c) x está comprendido entre -5 y 1 .
 d) x está entre -2 y 0 , ambos incluidos.

- 37** Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:

a) $-3 \leq x \leq 2$ b) $5 < x$ c) $x \geq -2$
 d) $-2 \leq x < 3/2$ e) $4 < x < 4,1$ f) $-3 \leq x$

- 38** Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:

a) $[-2, 7]$ b) $[13, +\infty)$ c) $(-\infty, 0)$
 d) $(-3, 0]$ e) $[3/2, 6)$ f) $(0, +\infty)$

- 39** Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos $(A \cap B)$ e $(I \cap J)$:

a) $A = [-3, 2]$ $B = [0, 5]$
 b) $I = [2, +\infty)$ $J = (0, 10)$

- 40** Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:

a) $x < 3$ o $x \geq 5$ b) $x > 0$ y $x < 4$
 c) $x \leq -1$ o $x > 1$ d) $x < 3$ y $x \geq -2$

• *Represéntalos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe: $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$*

- 41** Expresa, en forma de intervalo, los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| < 7$ b) $|x| \geq 5$ c) $|2x| < 8$
 d) $|x - 1| \leq 6$ e) $|x + 2| > 9$ f) $|x - 5| \geq 1$

- 42** Averigua qué valores de x cumplen:

a) $|x - 2| = 5$ b) $|x - 4| \leq 7$ c) $|x + 3| \geq 6$

- 43** Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:

a) $\sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{2x+1}$ c) $\sqrt{-x}$
 d) $\sqrt{3-2x}$ e) $\sqrt{-x-1}$ f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

- 44** Halla la distancia entre los siguientes pares de números:

a) 7 y 3 b) 5 y 11 c) -3 y -9 d) -3 y 4

- 45** Expresa como un único intervalo:

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$
 c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

46 Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

- a) Centro -1 y radio 2
 b) Centro $2,5$ y radio $2,01$
 c) Centro 2 y radio $1/3$

47 Describe como entornos los siguientes intervalos:

- a) $(-1, 2)$ b) $(1,3; 2,9)$
 c) $(-2,2; 0,2)$ d) $(-4; -2,8)$

48 Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:

- a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$
 b) $|-a| = -|a|$ c) $|a + b| = |a| + |b|$
 d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Logaritmos

49 Calcula:

- a) $\log_2 1024$ b) $\log 0,001$ c) $\log_2 \frac{1}{64}$
 d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ e) $\log_3 \sqrt{3}$ f) $\log_2 \sqrt{8}$
 g) $\log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$ h) $\log_{\pi} 1$

50 Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

- a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$
 b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

51 Calcula la base de estos logaritmos:

- a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

52 Calcula el valor de x en estas igualdades:

- a) $\log 3^x = 2$ b) $\log x^2 = -2$
 c) $7^x = 115$ d) $5^{-x} = 3$

53 Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.

- a) $\log \sqrt{148}$ b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$ c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$
 d) $\log_3 42,9$ e) $\log_5 1,95$ f) $\log_2 0,034$

54 Calcula la base de cada caso:

- a) $\log_x 1/4 = 2$ b) $\log_x 2 = 1/2$
 c) $\log_x 0,04 = -2$ d) $\log_x 4 = -1/2$

➤ Aplica la definición de logaritmo y las propiedades de las potencias para despejar x .

En c), $x^{-2} = 0,04 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100}$.

55 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

- a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$
 b) $\log x = \log 36 - \log 9$
 c) $\ln x = 3 \ln 5$
 d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$
 e) $\ln x = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 25$

➤ a) Por logaritmo de un producto: $\ln x = \ln (17 \cdot 13)$

56 Sabiendo que $\log 3 = 0,477$, calcula el logaritmo decimal de $30; 300; 3000; 0,3; 0,03; 0,003$.

57 Sabiendo que $\log k = 14,4$, calcula el valor de las siguientes expresiones:

- a) $\log \frac{k}{100}$ b) $\log 0,1 k^2$
 c) $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(\log k)^{1/2}$

58 Sabiendo que $\ln k = 0,45$, calcula el valor de:

- a) $\ln \frac{k}{e}$ b) $\ln \sqrt[3]{k}$ c) $\ln \frac{e^2}{k}$

59 Calcula x para que se cumpla:

- a) $x^{2,7} = 19$ b) $\log_7 3x = 0,5$ c) $3^{2+x} = 172$

60 Si $\log k = x$, escribe en función de x :

- a) $\log k^2$ b) $\log \frac{k}{100}$ c) $\log \sqrt{10k}$

61 Comprueba que $\frac{\log \frac{1}{a} + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = -\frac{1}{6}$ (siendo $a \neq 1$).

CUESTIONES TEÓRICAS

- 62** Explica si estas frases son verdaderas o falsas:
- Todo número entero es racional.
 - Hay números irracionales que son enteros.
 - Todo número irracional es real.
 - Todos los números decimales son racionales.
 - Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.
 - Los números racionales llenan la recta.
- 63** ¿Qué relación existe entre a y b en los siguientes casos?:
- $\log a = 1 + \log b$
 - $\log a + \log \frac{1}{b} = 0$
- 64** ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:
- $\log m + \log n = \log(m + n)$
 - $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$
 - $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$
 - $\log x^2 = \log x + \log x$
 - $\log(a^2 - b^2) = \log(a + b) + \log(a - b)$

PARA PROFUNDIZAR

- 65** Si $n \neq 0$ es natural, determina para qué valores de n estos números pertenecen a \mathbb{Z} :
- $\frac{n}{2}$
 - $\frac{3}{n}$
 - $n - 5$
 - $n + \frac{1}{2}$
 - \sqrt{n}
- 66** Di cuál es la parte entera de los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:
- $\log 348$
 - $\log_2 58$
 - $\log 0,03$
- 67** Sean m y n dos números racionales. ¿Qué puedes decir del signo de m y n en cada uno de estos casos?
- $m \cdot n > 0$ y $m + n < 0$
 - $m \cdot n < 0$ y $m - n > 0$
 - $m \cdot n < 0$ y $m - n < 0$
- 68** Si $x \in \mathbb{N}$ y $x > 1$, ordena estos números:
- $$\frac{1}{x+1}; x; \frac{1}{x}; -\frac{1}{x}; \frac{1}{-x-1}$$
- 69** Ordena de menor a mayor los números a , a^2 , $\frac{1}{a}$, \sqrt{a} , si $a > 1$ y si $0 < a < 1$.

AUTOEVALUACIÓN

- 1.** Dados los números:

$$-\frac{58}{45}, \frac{51}{17}, \frac{\pi}{3}, \sqrt[4]{-3}, \sqrt[3]{-8}, \sqrt[5]{2^3}, 1,0\overline{7}$$

- Clasifícalos indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} pertenecen.
 - Ordena de menor a mayor los reales.
 - ¿Cuáles de ellos pertenecen al intervalo $(-2, 11/9)$?
- 2.** Representa los siguientes conjuntos:
- $\{x / -3 \leq x < 1\}$
 - $[4, +\infty)$
 - $[-1, 4) \cup (4, 10]$
 - $(-\infty, 5) \cap (-1, +\infty)$
- 3.** Expresa en forma de intervalo en cada caso:
- $|x| \geq 8$
 - $|x - 4| < 5$
- 4.** Multiplica y simplifica: $\sqrt[3]{9a^2b} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2}$
- 5.** Reduce: $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$

- 6.** Escribe como potencia y simplifica.

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{12}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\right) : (a^4 \sqrt{a^{-2}})$$

- 7.** Efectúa, racionalizando previamente.

$$\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3 - \sqrt{3}}$$

- 8.** Aplica la definición de logaritmo y obtén x :

$$\text{a) } \log_3 x = -\frac{1}{4} \quad \text{b) } \ln \frac{x}{3} = -1 \quad \text{c) } \log_x 125 = 3$$

- 9.** Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A .

$$\log A = 2 \log 3 + 0,5 \log 4 - 3 \log 2$$

- 10.** Calcula x en cada caso.

$$\text{a) } 2,5^x = 0,0087 \quad \text{b) } e^{-x} = 425$$

-  **4.** En tu CD tienes las resoluciones de todos estos ejercicios.