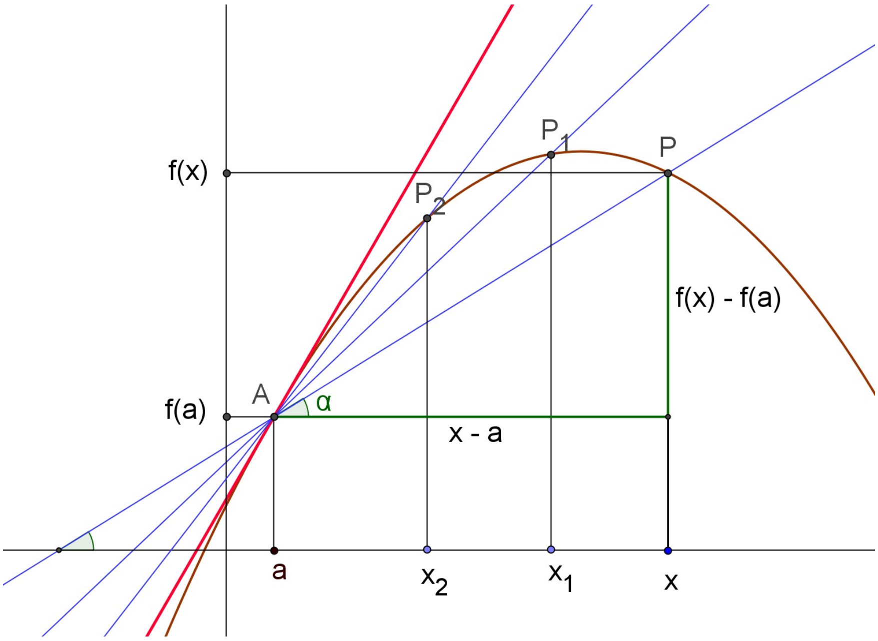
Def: : $y=f(x)$ es **derivable** en $x=a \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ (derivada de *f* en *a*)

Ej. 1: La derivada de $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ en $x=2$ será

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{2}{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x-2x-2}{3\cdot(x+1)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{3(x+1)(x-2)}=\frac{1}{9}$$

Interpretación geométrica:

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=tg(\alpha)$ es la pendiente de la recta que pasa por A y P.



Si $x\to a$, el punto P tiende al punto A y la recta que pasa por A y P es, en el límite, la recta tangente a $y=f(x)$ en el punto $A(a,f(a))$. La derivada es por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa *a*.

Ecuación de la recta tangente a una curva en el punto de abscisa *a*

$$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$$

Ecuación de la recta normal (perpendicular) a una curva en el punto de abscisa *a*

$$y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}\cdot(x-a)$$

Ej: La recta tangente a la función del ejemplo 1 en $x=2$ es: $y-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}\cdot(x-2)$

La recta normal a la función del ejemplo 1 en $x=2$ es: $y-\dfrac{2}{3}=-9\cdot(x-a)$

- En las funciones definidas a trozos habrá que calcular las derivadas laterales:

Derivada a la izquierda de a: $f'\left(a^{-}\right) = \lim\limits_{x\to a^{-}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Derivada a la derecha de a: $f'\left(a^{+}\right) = \lim\limits_{x\to a^{+-}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

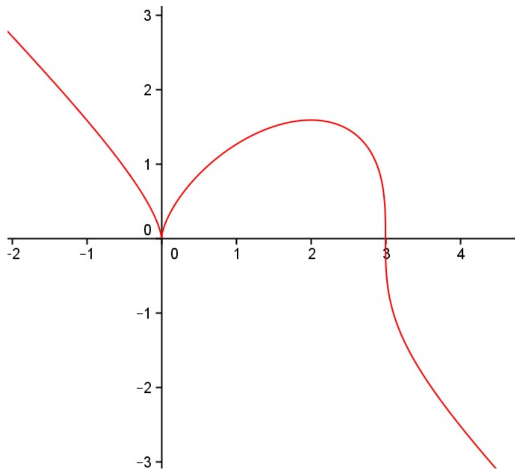
Si las derivadas laterales son iguales, ese será el valor de la derivada de la función en a, si son distintas la función no es derivable en a.

Teorema: "Si $y = f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow$ $y = f(x)$ es continua en a"

"Si $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$"

La implicación en sentido contrario no es cierta, una función puede ser continua y no derivable en un punto. Se dice que tiene un **punto anguloso.**

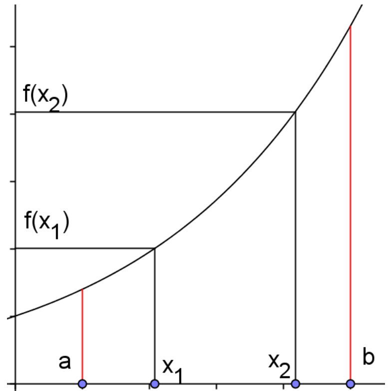
Ej: $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ es continua en cero y no es derivable.



Def: : $y = f(x)$ es **derivable en el intervalo abierto (a , b)** si es derivable en todos sus puntos.

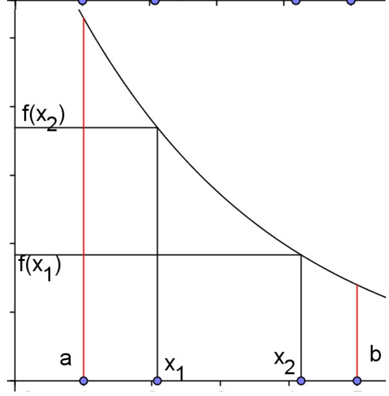
Aplicaciones de las derivadas

Crecimiento de una función



Def: $y = f(x)$ es **estrictamente creciente** en el intervalo (a ,b)
$\Leftrightarrow \quad \forall\ x_1, x_2 \in (a,b) \ / \ x_1 \prec x_2 \Rightarrow f(x_1) \prec f(x_2)$

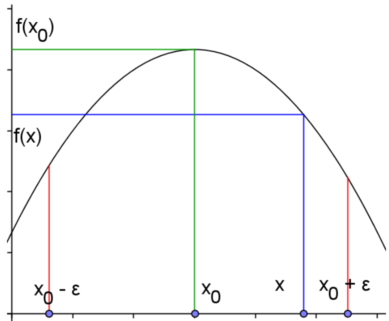
- Esto es equivalente a
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \succ 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$$



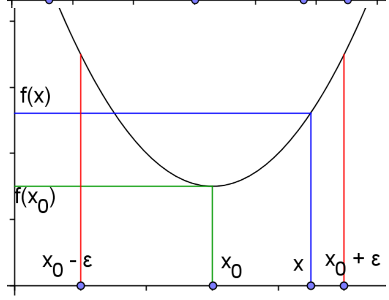
Def: : $y = f(x)$ es **estrictamente decreciente** en el intervalo (a ,b)
$\Leftrightarrow \quad \forall\ x_1, x_2 \in (a,b) \ / \ x_1 \prec x_2 \Rightarrow f(x_1) \succ f(x_2)$

- Esto es equivalente a
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \prec 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$$

Def: $y = f(x)$ es **estrictamente creciente** en x_0 si existe un entorno de x_0 en el que la función es estrictamente creciente (igual para decreciente)



Def: $y = f(x)$ tiene un **máximo relativo** en x_0 si existe un entorno reducido de x_0 en el que
$$f(x) \prec f(x_0) \ \forall\ x \in E^{*}(x_0, \varepsilon)$$



Def: $y = f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en x_0 si existe un entorno reducido de x_0 en el que
$$f(x) \succ f(x_0) \ \forall\ x \in E^{*}(x_0, \varepsilon)$$

Teorema:

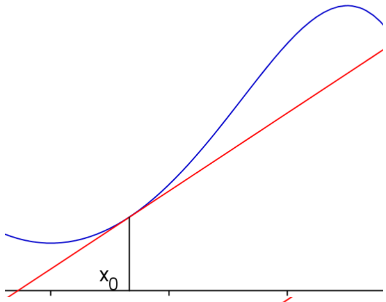
" Si $y = f(x)$ es derivable en x_0 y $\left\{ \begin{matrix} creciente \\ decreciente \end{matrix} \right\}$ $en\ x_0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{matrix} \right.$ "

Teorema:

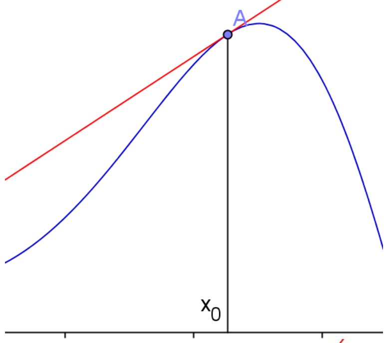
" Si $y = f(x)$ es derivable en x_0 y tiene un $\left\{ \begin{matrix} máximo\ relativo \\ mínimo\ relativo \end{matrix} \right\}$ $en\ x_0 \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$ "

Concavidad

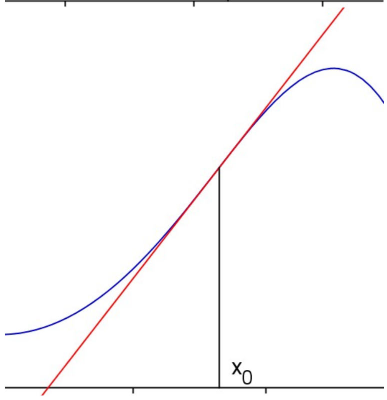
Def: $y = f(x)$ es **cóncava** en un punto de abscisa x_0, si en un entorno de x_0 la curva está por encima de la recta tangente en ese punto.



Def: $y = f(x)$ es **cónvexa** en un punto de abscisa x_0, si en un entorno de x_0 la curva está por debajo de la recta tangente en ese punto.



Def: $y = f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en un punto de abscisa x_0, si la tangente atraviesa la curva en ese punto. Es el punto en el que cambia la concavidad.



Teorema:

" Si $y = f(x)$ es derivable en x_0 y $\left\{ \begin{matrix} cóncava \\ convexa \end{matrix} \right\} en\ x_0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} f''(x_0) \geq 0 \\ f''(x_0) \leq 0 \end{matrix} \right.$ "

Teorema:

" Si $y = f(x)$ es derivable en x_0 y tiene un punto de inflexión en $x_0 \Rightarrow \quad f''(x_0) = 0$ "

Funciones derivables en un intervalo

Teorema de Rolle:

$$\text{“} \left. \begin{matrix} Si\ \ y = f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ derivable\ en\ (a,b) \\ y\ \ f(a) = f(b) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \exists\ c \in (a,b)\ /\ f'(c) = 0 \text{”}$$

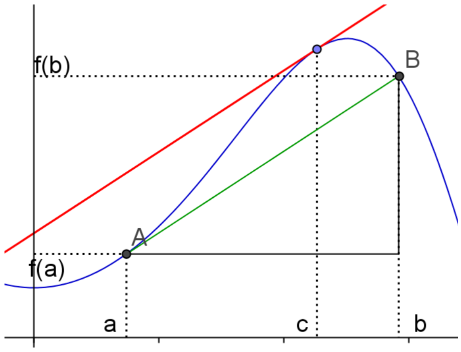
- Geométricamente lo que nos dice el teorema es que existe un punto entre *a* y *b* donde la tangente es paralela al eje X, habrá un máximo o un mínimo relativos.
- El teorema de Rolle, junto con el teorema de Bolzano, nos permite encontrar intervalos en los que las ecuaciones $f(x) = 0$ tienen una única solución. Entre dos soluciones de la ecuación tendría que haber un cero de la derivada.

El teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio.

Teorema del valor medio (o de Lagrange, o de los incrementos finitos):

$$“\left.\begin{array}{r} Si\ \ y = f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ derivable\ en\ (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in (a,b)\ /\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}”$$

Geométricamente, el teorema nos dice que existe por lo menos un punto del intervalo en el que la tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.



El teorema del valor medio tiene aplicaciones importantes:

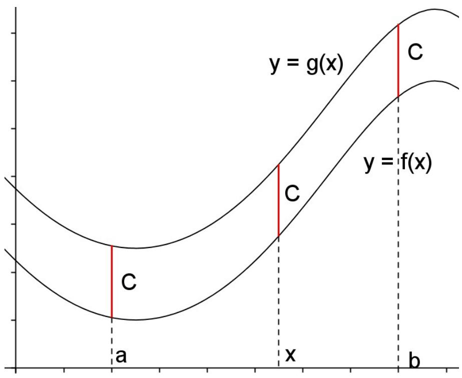
Teorema:

$$“\left.\begin{array}{r} Si\ \ y = f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ derivable\ en\ (a,b) \\ y\ \ f'(x) = 0\ \ \forall\ x \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = cte.\ \ \forall\ \ x \in [a,b]”$$

Teorema:

$$“\left.\begin{array}{r} Si\ \ f(x)\ y\ g(x)\ son\ continuas\ en\ [a,b] \\ derivables\ en\ (a,b) \\ y\ \ f'(x) = g'(x)\ \ \forall\ x \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x) + C\ \ \forall\ \ x \in [a,b]”$$

El teorema nos dice que si dos funciones tienen la misma derivada en todos los puntos de un intervalo (tendrán las tangentes paralelas en todos los puntos), las funciones también son paralelas.
Tiene aplicación en el cálculo de integrales.



Regla de L´Hôpital

$$“\left.\begin{array}{l} Si\ \ f(x)\ y\ g(x)\ son\ derivables\ en\ un\ entorno\ de\ a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0\ \ y\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \\ y\ \exists\ \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}”$$

- La regla de L´Hôpital se puede aplicar también en la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.