2º BCN Continuidad de una función

Continuidad en un punto

Def: $y = f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si la función está definida de distinta forma a la izquierda que a la derecha de a (funciones definidas a trozos) los límites laterales tienen que coincidir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

- Las funciones elementales son continuas en su dominio.

Operaciones de funciones continuas

Si las funciones f y g son continuas en $x = a$, entonces $f+g$, $f-g$ y $f\,g$ son continuas en a.

Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Continuidad lateral

Def: $y = f(x)$ es continua a la derecha de $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Def: $y = f(x)$ es continua a la izquierda de $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

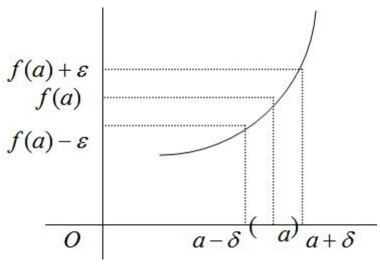
Continuidad en un intervalo

Def: Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a , b) si es continua en todos los puntos del intervalo

Def: Una función es continua en un intervalo cerrado $[a , b]$ si es continua en el abierto (a , b) y continua a la derecha de a y a la izquierda de b. ($\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$)

Teorema de conservación del signo

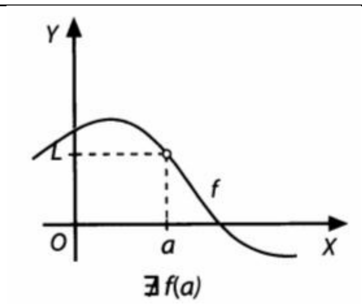
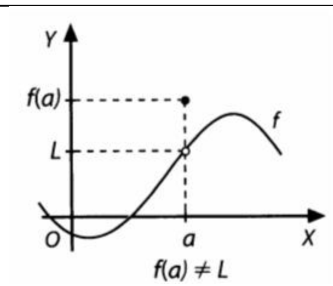
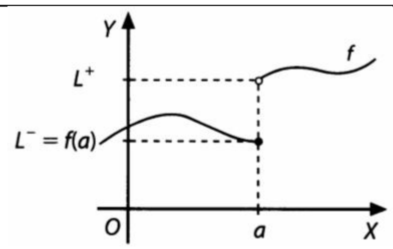
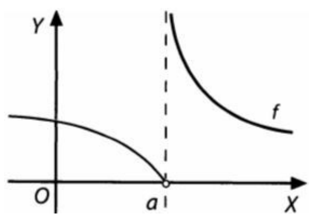
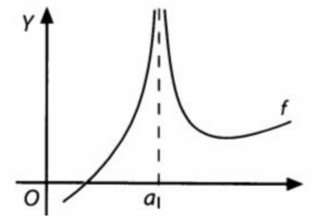
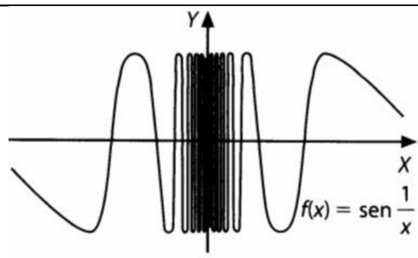
"Si $y = f(x)$ es continua en $x = a$ y $f(x) \neq 0 \Rightarrow \exists$ un entorno de a en el que la función tiene el mismo signo que $f(a)$"



Teorema de acotación

"Si $y = f(x)$ es continua en $x = a \Rightarrow \exists$ un entorno de a en el que la función está acotada, $H \leq f(x) \leq K$"

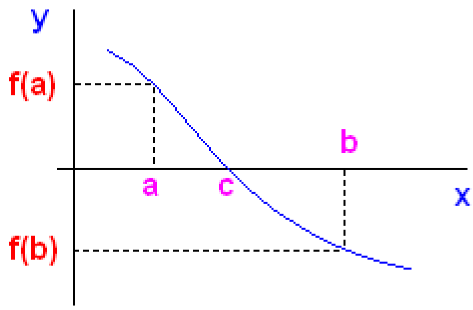
Tipos de discontinuidad

<table>
<tr>
<td rowspan="6">DISCONTINUIDAD</td>
<td rowspan="2">Evitable
$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$</td>
<td>No existe $f(a)$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(a) \neq L$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="4">Inevitable
No existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$</td>
<td>De salto finito
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">De salto infinito
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$
o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$
o los dos son infinitos</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>De 2ª especie o esencial
No existe el límite o no existe la función a uno de los lados de a</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Teoremas de continuidad en un intervalo cerrado

Teorema de Bolzano (de la existencia de raices)

$$"\left.\begin{array}{r} Si\ \ y=f(x)\ \ es\ continua\ en\ el\ intervalo\ cerrado\ [a,b] \\ y\ el\ signo(f(a)) \neq signo(f(b)) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in (a,b)\ /\ f(c)=0"$$



Teorema de Darboux (de los valores intermedios)

$$"\left.\begin{array}{l} Si\ \ y=f(x)\ \ es\ continua\ en\ [a,b] \\ x_1 \prec x_2 \in [a,b]\ \ con\ f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow\ f\ toma\ en [x_1,x_2]\ todos\ los\ valores\ entre\ f(x_1)\ y\ f(x_2)"$$

Teorema de acotación en un intervalo cerrado

"Si una función es continua en un intervalo cerrado [*a* , *b*], entonces está acotada en él"

Teorema de Weierstrass

"Si una función es continua en un intervalo cerrado [*a* , *b*], entonces alcanza el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo"